# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό σελ. 135

**Α2.**

**α.** Λ

**β.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$. Η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x}=-1$. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει γωνιακό σημείο στο (0,0).

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση $f$ μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο $x_0$ χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Αν, όμως, η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$, τότε θα είναι και συνεχής στο $x_0$,

**Α3.** Σχολικό σελ. 73

**Α4.**

**α)** Λάθος
**β)** Σωστό
**γ)** Λάθος
**δ)** Σωστό
**ε)** Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $f(x)=\ln x$ με $A_f=(0,+\infty)$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$ με $A_g=\Re-\{1\}$

Για να ορίζεται η $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ πρέπει :

$$\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x(1-x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\in(0,1) \end{cases}$$

. Δηλ. $A_{f\circ g}=(0,1)$.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\dfrac{x}{1-x}$ με $x\in(0,1)$.

**Β2.** Η $h(x)=(f\circ g)(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με :

$$h'(x)=\left[\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]'=\frac{1}{\frac{x}{1-x}}\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{x(1-x)}>0$$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Επομένως η $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$, άρα είναι «1-1» και αντιστρέψιμη.

Θέτουμε $h(x)=y\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=y\Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x}=e^y\Leftrightarrow x=e^y-xe^y\Leftrightarrow x+xe^y=e^y\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(1+e^y)=e^y\Leftrightarrow x=\dfrac{e^y}{e^y+1}$, $y\in\Re$.

Επίσης $x\in(0,1)\Leftrightarrow 0<\dfrac{e^y}{e^y+1}<1$

$\dfrac{e^y}{e^y+1}>0$ ισχύει για κάθε $y\in\Re$ και $\dfrac{e^y}{e^y+1}<1$ ισχύει για κάθε $y\in\Re$.

Τελικά : $h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\Re$.

**Β3.** $\phi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\Re$.

Για κάθε $x\in\Re$ $\phi'(x)=\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)'=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$ για κάθε $x\in\Re$.

Άρα η $\phi$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ και δεν έχει ακρότατα.

Για κάθε $x\in\Re$ $\phi''(x)=\left(\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'=\dfrac{e^x(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4}=\dfrac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$

$$\phi''(x)=0\Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}=0\Leftrightarrow 1-e^x=0\Leftrightarrow x=0$$

$$\phi''(x)>0\Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}>0\Leftrightarrow 1-e^x>0\Leftrightarrow x<0$$

$$\phi''(x)<0\Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}<0\Leftrightarrow 1-e^x<0\Leftrightarrow x>0$$

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\phi''(x)$ | + | 0 | - |
| $\phi$ | | Σ.Κ. | |

Άρα η $\phi$ είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty,0]$ και η $\phi$ είναι κοίλη στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Το σημείο $\mathrm{A}(0,\phi(0))$ δηλ. το $\mathrm{A}\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι σημείο καμπής της $\phi$.

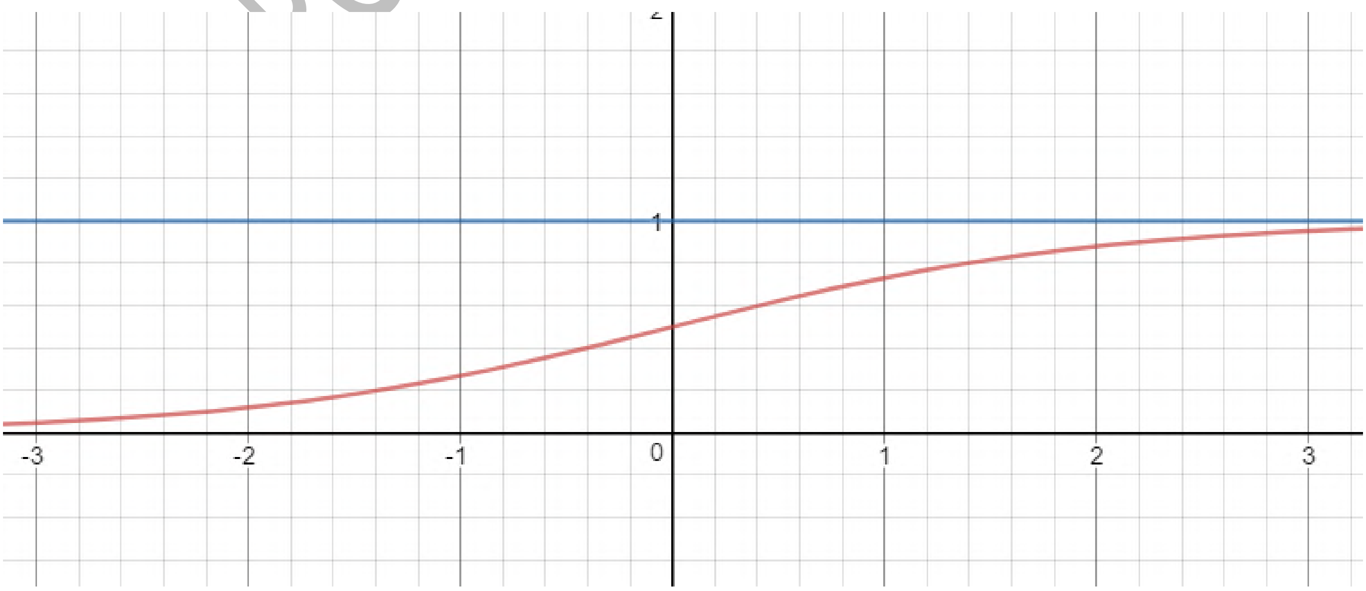
**B4.** Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$, άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{1}=0$, άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$.

<u>Πίνακας μεταβολών :</u>

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\phi''(x)$ | + | 0 | - |
| $\phi'(x)$ | + | | + |
| $\phi$ | | Σ.Κ. | |





## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Έχουμε $f(x)=-\eta\mu x$ , $x\in[0,\pi]$ και $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[0,\pi]$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ είναι

$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$\varepsilon: y+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0(x-x_0)$ και $A(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2})\in\varepsilon \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0(\frac{\pi}{2}-x_0)$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot(\frac{\pi}{2}-x)+\eta\mu x-\frac{\pi}{2}$, $x\in[0,\pi]$

Αρκεί να δείξουμε ότι η g(x)=0 έχει δύο ακριβώς ρίζες στο [0,π]

Παρατηρούμε ότι g(0)=0=g(π) και $g'(x)=-\eta\mu x(\frac{\pi}{2}-x)$ , $x\in(0,\pi)$

με $g'(x)=0$ για $x=\frac{\pi}{2}$ , x=0, x=π.

-ημx<0 για x∈(0,π)άρα το πρόσημο της g' προκύπτει στον παρακάτω πίνακα

| | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $-$ | | $+$ | |
| $g$ | | γν. φθ. | | γν. αυξ. | |



Έστω $A_1=[0,\frac{\pi}{2}]$

Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1$ άρα

$g(A_1)=[g(\frac{\pi}{2}),g(0)]=[\frac{2-\pi}{2},0]$ .

$g(0)=0$ και g γνησίως φθίνουσα στο $A_1$ άρα το 0 μοναδική ρίζα στο $A_1$ .

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=(\frac{\pi}{2},\pi]$ άρα

$g(A_2)=(g(\frac{\pi}{2}),g(\pi)]=(\frac{2-\pi}{2},0]$ (g συνεχής στο $\frac{\pi}{2}$ )

g(π)=0 και g γνησίως αύξουσα στο $A_2$ άρα το π μοναδική ρίζα.

<u>Β΄ τρόπος</u>: Έστω ότι η g έχει και τρίτη ρίζα ρ∈(0,π). Τότε

g συνεχής στο [0,ρ] και στο [ρ,π]

παραγωγίσιμη στο (0,ρ) και στο (ρ,π) και $g'(x)=-\eta\mu x(\frac{\pi}{2}-x)$ με $g'(x)=-\eta\mu x(\frac{\pi}{2}-x)$

g(0)=g( ρ)=g(π) και σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle θα υπάρχει τουλάχιστον ένα

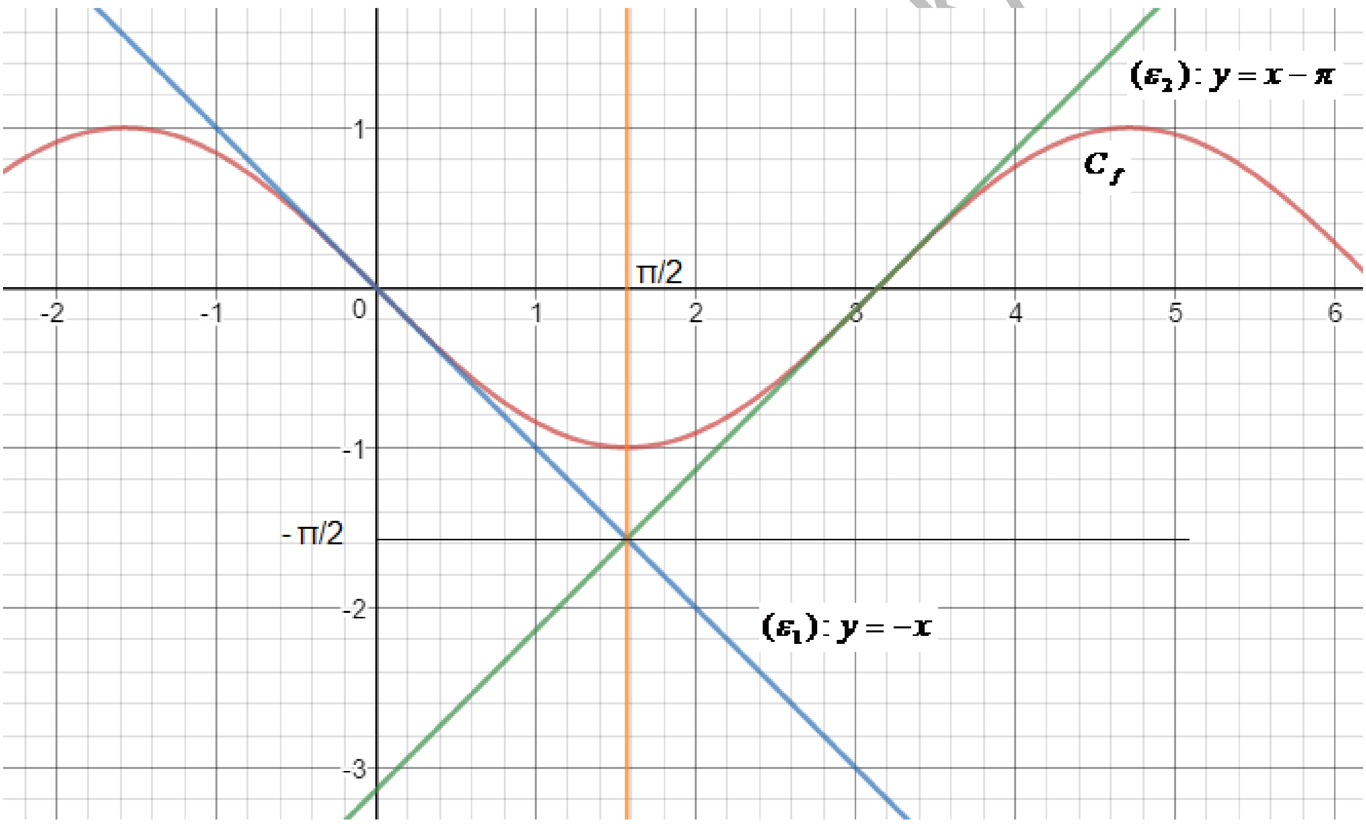
$\xi_1\in(0,\rho)$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\rho,\pi)$ ώστε $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$ άτοπο αφού η g΄(x)=0 έχει μία μόνο ρίζα στο (0,π).

Άρα η εξίσωση g(x)=0 έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις x=0 και x=π και οι εξισώσεις των

εφαπτομένων είναι $\begin{array}{l}\varepsilon_1: y-0=-1(x-0)\Leftrightarrow y=-x \text{ στο } M(0,0)\\ \varepsilon_2: y-0=1(x-\pi)\Leftrightarrow y=x-\pi \text{ στο } N(\pi,0)\end{array}$



Γ2.




$\varepsilon_1: y=-x$ και $\varepsilon_2: y=x-\pi$

$$E_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\eta\mu x+x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\eta\mu x-x+\pi)dx=\left[\sigma\upsilon\nu x+\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\sigma\upsilon\nu x-\frac{x^2}{2}+\pi x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi^2-8}{4}\text{τ.μ.}$$

$$E_2=\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=2\text{τ.μ.}$$

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{\pi^2-8}{4}}{2}=\frac{\pi^2-8}{8}=\frac{\pi^2}{8}-1$$

**Γ3.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-\eta\mu x+x}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\left[(-\eta\mu x+x)\cdot\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}\right]=+\infty$ καθώς :

$\lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x+x)=\pi$

$\lim\limits_{x\to\pi}\big(f(x)-x+\pi\big)=0$

Επίσης για κάθε η f είναι συνεχής στο $x\in[0,\pi]$, $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x$, $f''(x)=\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$, δηλ. η $f$ είναι κυρτή στο $[0,\pi]$, επομένως η εφαπτομένη $(\varepsilon_2): y=x-\pi$ της $C_f$ στο $x_0=\pi$, βρίσκεται κάτω από την $C_f$ με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα $f(x)\geq x-\pi \Leftrightarrow f(x)-x+\pi\geq 0$ και το «=» ισχύει μόνο για $x_0=\pi$. Έτσι $f(x)-x+\pi>0$ κοντά στο $x_0=\pi$ άρα : $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}=+\infty$.

**Γ4.** Από Γ3. $f(x)\geq x-\pi$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=\pi>e$.

Επομένως για κάθε $x\in[1,e]$ ισχύει : $f(x)>x-\pi \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}>1-\dfrac{\pi}{x}$, άρα :

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>\left[x-\pi\ln x\right]_1^e \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>e-\pi-1.$$

**ΘΕΜΑ Δ**

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4} & , \ x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x & , \ x\in[0,\pi]\end{cases}$$

**Δ1.**

Η f είναι συνεχής στο [-1,0) ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η f είναι συνεχής στο (0,π] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x\eta\mu x)=1\cdot 0=0$

$f(0)=e^0\cdot\eta\mu 0=0$

Άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Τελικά η f είναι συνεχής στο [-1,π].

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{(-x)^{4/3}}{x}=\lim_{x\to0^-}-(-x)^{1/3}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x\eta\mu x}{x}=1\cdot1=1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 και το $x_0=0$ είναι κρίσιμο σημείο αυτής.

Στο (-1,0) η $f'(x)=\left((-x)^{4/3}\right)'=\frac{4}{3}(-x)^{1/3}(-1)<0$ άρα η f δεν παρουσιάζει κρίσιμα σημεία στο (-1,0)

Στο (0,π)

η $f'(x)=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu x\neq0)$

$\varepsilon\varphi x=-1 \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

$0<x<\pi \Leftrightarrow 0<\kappa\pi-\frac{\pi}{4}<\pi \Leftrightarrow 0<\kappa-\frac{1}{4}<1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}<\kappa<\frac{5}{4}$ και $\kappa\in\mathbb{Z}$ άρα $\kappa=1$

Δηλαδή $x=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

Άρα το $x_0=\frac{3\pi}{4}$ είναι κρίσιμο σημείο της f.

**Δ2.**

$f'(x)<0,\ \forall x\in(-1,0)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [-1,0] αφού η f είναι συνεχής στο [-1,0].

| x | $-1$ | | $0$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | $-$ | ‖ | $+$ | | $-$ | |
| f(x) | | γν. φθίνουσα | | γν. αύξουσα | | γν. φθίνουσα | |
| | Τ.Μ. | | min | | max | | min |

$f(-1)=1$

$f(0)=0$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot ημ\frac{3\pi}{4}=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot ημ\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$f(\pi)=0$

Για $x_1=-1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Για $x_2=\frac{3\pi}{4}$ η f παρουσιάζει μέγιστο.

Για $x_3=0$ και $x_4=\pi$ η f παρουσιάζει ελάχιστο.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1=[-1,0)\\ f\ \text{συνεχής και γν. φθίν.}\end{array}\right\}\ f(\Delta_1)=\lim_{x\to 0}f(x),f(-1)]\ \Leftrightarrow\ f(\Delta_1)=\ 0,1$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_2=\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]\\ f\ \text{συνεχής και γν. αύξ.}\end{array}\right\}\ f(\Delta_2)=\left[f(0),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]\ \Leftrightarrow\ f(\Delta_2)=\left[0,e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

$f(0)=0$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}ημ\frac{3\pi}{4}$$

όμως $ημ\frac{3\pi}{4}=ημ\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=ημ\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

άρα $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_3=\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]\\ f\ \text{συνεχής και γν. φθίν.}\end{array}\right\}\ f(\Delta_3)=\left[f(\pi),\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)\right]\ \Leftrightarrow\ f(\Delta_3)=\left[0,e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

**Δ3.**

Ε $C_f$ , $C_g$ , $g(x)=e^{5x}$ , $x\in\mathbb{R}$ , $x=0$ , $x=\pi$

Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=e^{x}ημx-e^{5x}=e^{x}(ημx-e^{4x})$

$0 \le x \le \pi \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le 4x \le 4\pi \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le e^{4x} \le e^{4\pi} \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{l} -1 \ge -e^{4x} \ge -e^{4\pi} \\ \;\;1 \ge \eta\mu x \ge -1 \\ \hline \;\;0 \ge \eta\mu x - e^{4x} \ge -1 - e^{4\pi} \end{array}$$

ή αλλιώς

$\eta\mu x < x\,, \quad x > 0$

όμως $e^x > x\,, \quad x \in \mathbb{R}$, από γνωστή ανίσωση $\ln x \le x - 1, x > 0$

όπου $x \to e^{4x}$ προκύπτει $\ln e^{4x} \le e^{4x} - 1 \Leftrightarrow e^{4x} \ge 4x + 1 > 4x > x$ για $x > 0$

έτσι $e^{4x} > x > \eta\mu x$

άρα $e^{4x} > \eta\mu x$

Άρα $E = -\int_0^{\pi} h(x)dx = \int_0^{\pi} e^{5x} - e^x\eta\mu x\, dx = \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu x\, dx = \frac{e^{5\pi}}{5} - \frac{1}{5} - \frac{e^{\pi}+1}{2}$ τ.μ.

$I = \int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu x\, dx = \left[e^x(-\sigma\upsilon\nu x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu x\, dx =$

$= e^{\pi} + 1 + \int_0^{\pi} e^x (\eta\mu x)' dx = e^{\pi} + 1 + \left[e^x \cancel{\eta\mu x}\right]_0^{\pi} - I$

$\Leftrightarrow \quad 2I = e^{\pi} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{e^{\pi}+1}{2}$

**Δ4**

$16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \quad 16f(x) - (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad f(x) - \frac{(4x-3\pi)^2}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) - \left(\frac{4x-3\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right)-f(x)+\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)-f(x)\geq 0 \quad \text{και} \quad \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right)-f(x)=0 \quad \text{και} \quad \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=f(x) \quad \text{και} \quad x-\frac{3\pi}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{3\pi}{4} \quad \text{μοναδικό, τοπικό μέγιστο}$$

ή

$$f(x)-\left(\frac{4x-3\pi}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)-\left(\frac{4x-3\pi}{4}\right)^2=f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\left(\frac{4x-3\pi}{4}\right)^2$$

Όμως $f(x)\leq f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ άρα $f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\leq 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\leq 0 \\ \text{όμως } \left(\frac{4x-3\pi}{4}\right)^2\geq 0 \end{array}\right\} \text{η ισότητα ισχύει μόνο όταν μηδενίζουν ταυτόχρονα δηλ } x=\frac{3\pi}{4}$$