

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A.

- α.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Μονάδες 10

- β.** Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ;

Μονάδες 5

- B.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1.** Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $a+bi$ και $c+di$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 2

- 2.** Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 2

- 3.** Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$

Μονάδες 2

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

4. Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Μονάδες 2

5. Ισχύει: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, όπου α, c είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha \neq -1$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{1}{1+i} - \frac{i(i-3)}{2}.$$

- α. Να αποδείξετε ότι:

$$-\bar{z} = -1+i, \quad z^2 = 2i, \quad z^3 = -2+2i.$$

Μονάδες 9

- β. Αν A, B, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $-\bar{z}, z^2, z^3$, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

- γ. Να αποδείξετε ότι:

$$|z^3 - z^2|^2 = |z^2 + \bar{z}|^2 + |z^3 + \bar{z}|^2.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{x-\alpha}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρεθεί η τιμή του α , ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = ex$.

Μονάδες 10

- β.** Για $\alpha = -1$,
- i.** να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,

Μονάδες 10

- ii.** να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x - 1 \text{ και } g(x) = \ln x, \quad x > 0.$$

- α.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) \geq g(x), \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 8

- β.** Αν $h(x) = f(x) - g(x)$, τότε:

- i.** Να αποδείξετε ότι:

$$0 \leq h(x) \leq e - 2, \text{ για κάθε } x \in [1, e].$$

Μονάδες 7

- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

Μονάδες 5

- iii.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^e e^{h(x)} [h(x) + 1] h'(x) dx.$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης**. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ