ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ 1967-2017

ΠΟΛΥ ΧΡΗΣΙΜΑ ΣΤΗΝ ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ…

- $xf'(x) + f(x) = \left(xf(x)\right)'$
- $\dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)', \quad x \neq 0$
- $(x-\alpha)f'(x) + f(x) = \left((x-\alpha)f(x)\right)'$
- $\dfrac{(x-\alpha)f'(x) - (f(x)-\beta)}{(x-\alpha)^2} = \left(\dfrac{f(x)-\beta}{x-\alpha}\right)', \quad x \neq \alpha$
- $f'(x)f(x) = \left(\dfrac{f^2(x)}{2}\right)'$
- $f'(x)f^{\nu}(x) = \left(\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right)'$ ή $\dfrac{f'(x)}{f^{\nu}(x)} = f'(x)f^{-\nu}(x) = \left(\dfrac{f^{-\nu+1}(x)}{-\nu+1}\right)'$
- $f'(x)e^{f(x)} = \left(e^{f(x)}\right)'$ ή $\dfrac{f'(x)}{e^{f(x)}} = f'(x)e^{-f(x)} = \left(-e^{-f(x)}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))', \quad f(x) > 0$
- $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)', \quad f(x) \neq 0$
- $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \left(\sqrt{f(x)}\right)', \quad f(x) > 0$
- $f''(x)f(x) + \left(f'(x)\right)^2 = \left(f'(x)f(x)\right)' = \left(\dfrac{f^2(x)}{2}\right)''$
- $\dfrac{f''(x)f(x) - \left(f'(x)\right)^2}{f^2(x)} = \left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)' = (\ln f(x))'', \quad f(x) > 0$

- $f'(x)+f(x)=\cdots \overset{\cdot e^{x}}{\Leftrightarrow} e^{x}f'(x)+e^{x}f(x)=\cdots \Leftrightarrow (f(x)e^{x})'=\cdots$
- $f'(x)-f(x)=\cdots \overset{\cdot e^{-x}}{\Longleftrightarrow} e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=\cdots \Leftrightarrow (f(x)e^{-x})'=\cdots$
- $f'(x)+\kappa f(x)=\cdots \overset{\cdot e^{\kappa x}}{\Longleftrightarrow} e^{\kappa x}f'(x)+e^{\kappa x}f(x)=\cdots \Leftrightarrow (f(x)e^{\kappa x})'=\cdots$
- $\boxed{f'(x)+g'(x)f(x)=\cdots \overset{\cdot e^{g(x)}}{\Longleftrightarrow} e^{g(x)}f'(x)+e^{g(x)}g'(x)f(x)=\cdots \Leftrightarrow \left(f(x)e^{g(x)}\right)'=\cdots}$
- $f'(x)+g'(x)f(x)=\cdots \overset{:f(x)>0}{\Longleftrightarrow} \dfrac{f'(x)}{f(x)}+g'(x)=\cdots \Leftrightarrow (\ln f(x)+g(x))'=\cdots$

Τρεις πιο απαιτητικές ασκήσεις στο Θ.Rolle

1) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- οι f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta], \alpha > 0$
- οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta) = 0$
- $f(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{\xi}$$

2) Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β), με $f'(x)g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι:

α) οι f και g είναι «1-1» στο $[\alpha, \beta]$

β) υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{f'(\xi)}{f(\alpha) - f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\beta) - g(\xi)} = 1.$$

3) Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \left(\frac{1}{1-\xi} - \frac{1}{1+\xi}\right) f(\xi)$$