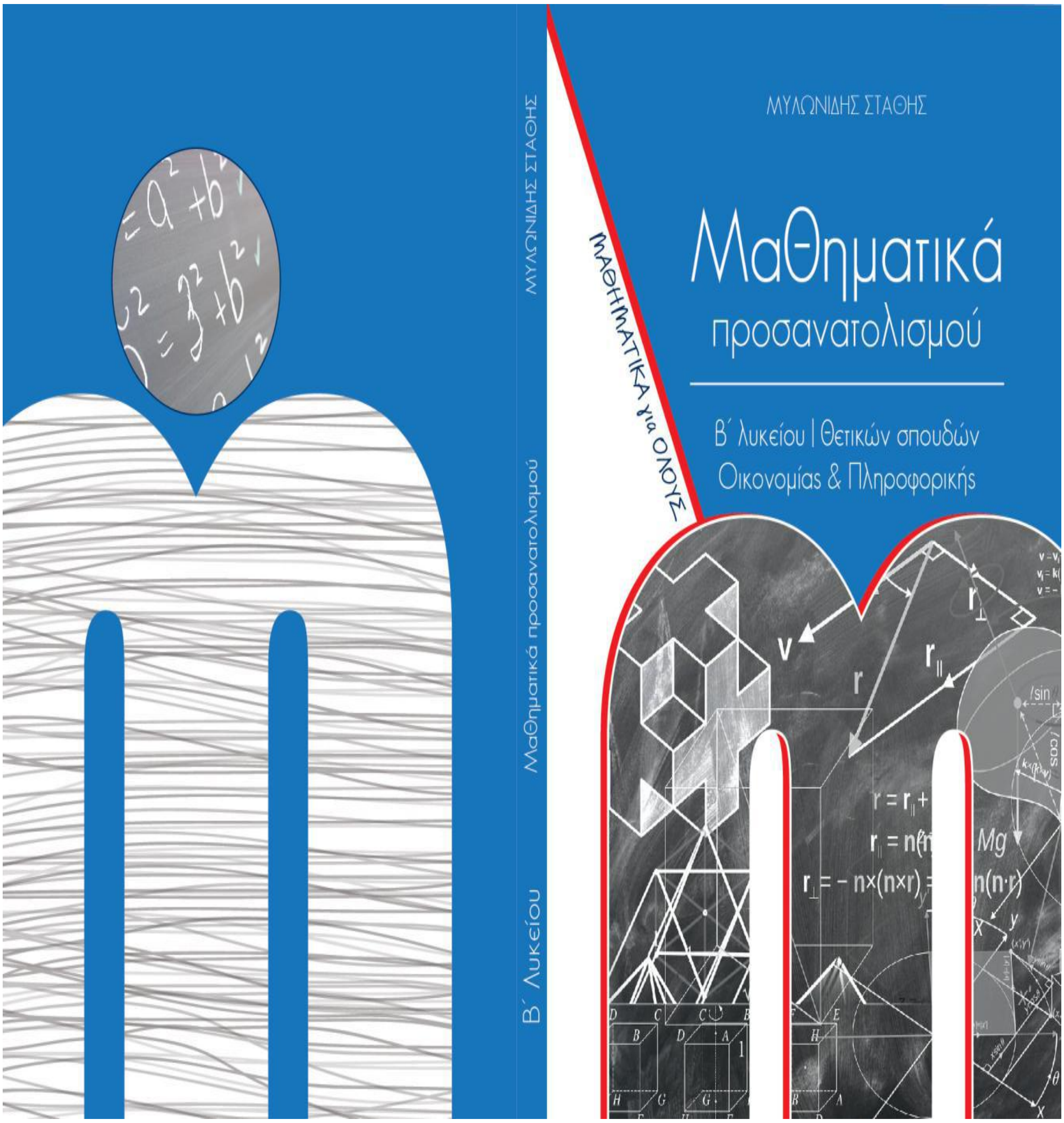
ΘΕΩΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β ΄ΛΥΚΕΙΟΥ



ΘΕΩΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να δώσετε τους ορισμούς: διάνυσμα, μηδενικό διάνυσμα, μέτρο διανύσματος, μοναδιαίο διάνυσμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο Α, ονομάζεται αρχή ή σημείο εφαρμογής, ενώ το δεύτερο Β ονομάζεται πέρας του διανύσματος.

Μηδενικό διάνυσμα ονομάζεται το διάνυσμα που η αρχή και το πέρας του συμπίπτουν. Συμβολίζεται με $\vec{0}$.

Μέτρο ή **μήκος** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$.

Μοναδιαίο διάνυσμα ονομάζεται το διάνυσμα έχει μέτρο 1.

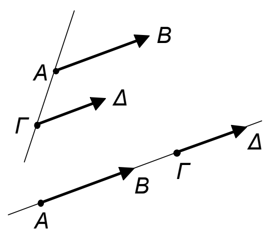
2. Να δώσετε τους ορισμούς: φορέας διανύσματος, παράλληλα διανύσματα, ομόρροπα- αντίρροπα διανύσματα, ίσα διανύσματα, αντίθετα διανύσματα, γωνία δύο διανυσμάτων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

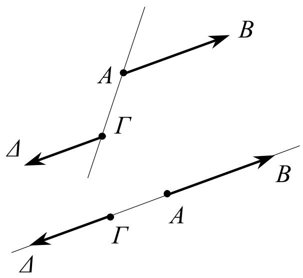
Φορέας διανύσματος ονομάζεται η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα.

Παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα ονομάζονται δύο ή περισσότερα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς. Για δύο παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέμε ότι έχουν **ίδια διεύθυνση** και γράφουμε $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Ομόρροπα ονομάζονται δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ όταν:
α) όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία $A\Gamma$ που ενώνει τις αρχές τους ή
β) όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες AB και $\Gamma\Delta$ περιέχει την άλλη. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την **ίδια κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Αντίρροπα ονομάζονται δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



3. Να δώσετε τους ορισμούς: ίσα διανύσματα, αντίθετα διανύσματα, γωνία δύο διανυσμάτων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ίσα ονομάζονται δύο μη μηδενικά διανύσματα όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

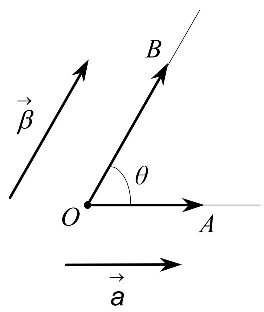
- Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, γράφουμε $\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}$.
- Τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους και συμβολίζονται με $\vec{0}$.

Αντίθετα ονομάζονται δύο διανύσματα, όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

- Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, γράφουμε $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

Γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Με αρχή ένα σημείο *O* παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA}=\vec{\alpha}$ και $\vec{OB}=\vec{\beta}$.



Την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, που ορίζουν οι ημιευθείες *OA* και *OB*, την ονομάζουμε **γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$** και τη συμβολίζουμε με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ή $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}})$

Για την γωνία $\theta=(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ισχύει $\mathbf{0^0 \le \theta \le 180^0}$

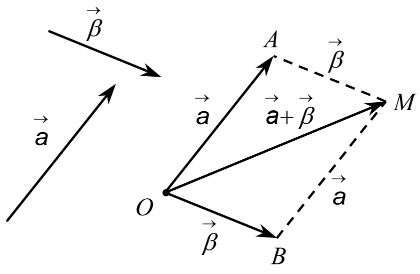
Ειδικότερα:

- $\theta=0$, αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.
- $\theta=\pi$, αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.
- $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι **ορθογώνια** ή **κάθετα** και γράφουμε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.
- Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία θ με $0\le\theta\le\pi$.

4. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, τότε να αποδείξετε ότι:

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ και $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

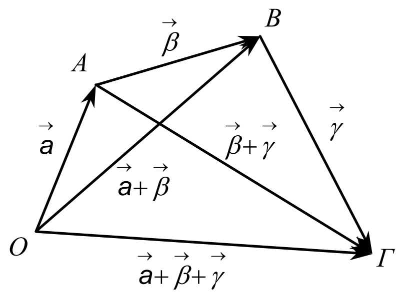


- Από το διπλανό σχήμα έχουμε:

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}$

$\vec{\beta}+\vec{\alpha}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OM}$.

Επομένως, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$.



- Από το διπλανό σχήμα έχουμε:

$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$ και

$\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$.

Επομένως, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$.

5. Τι ονομάζεται διαφορά του ενός διανύσματος $\vec{\beta}$ από ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$.
Δηλαδή $\boldsymbol{\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})}$

6. Να δώσετε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού ενός πραγματικού αριθμού λ (λ≠0) επί ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Ποιες ιδιότητες ισχύουν.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα.

Ονομάζουμε **γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$** και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ή $\lambda\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

- είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$
- είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$ και
- έχει μέτρο $|\lambda||\vec{\alpha}|$.

Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

7. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, να αποδείξετε ότι αν $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

Πράγματι, αν θέσουμε $\kappa = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$, τότε $|\vec{\alpha}| = \kappa |\vec{\beta}|$.

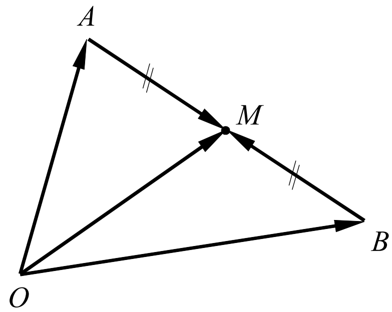
Συνεπώς:

- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = -\kappa\vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\beta}$.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση υπάρχει λ τέτοιος, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

8. Δίνεται ένα διάνυσμα $\vec{AB}$ και M το μέσο του, να αποδείξετε ότι για ένα σημείο O αναφοράς ισχύει: $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έστω το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς O.

Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου M του τμήματος AB έχουμε:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \quad \text{και}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}.$$

Επομένως, $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} =$

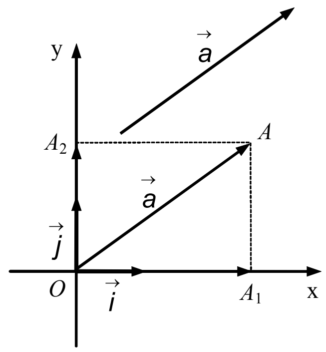
$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \text{Άρα} \quad \vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

9. Σε σύστημα αναφοράς xOy δίνεται το σημείο Α(x, y), αν $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των x, y κατά μοναδικό τρόπο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου.

Με αρχή το Ο σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, έχουμε:



$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} \qquad (1)$$

Αν x, y είναι οι συντεταγμένες του A, τότε ισχύει $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$ και $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$. Επομένως η ισότητα (1) γράφεται

$$\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Επομένως το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι **γραμμικός συνδυασμός** των $\vec{i}$ και $\vec{j}$.

Μοναδικότητα

Η έκφραση του $\vec{\alpha}$ ως γραμμικού συνδυασμού των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι μοναδική.
Πράγματι, έστω ότι ισχύει και $\vec{\alpha} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.
Τότε θα έχουμε: $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$$(x - x')\vec{i} = (y' - y)\vec{j}$$

Αν υποθέσουμε ότι $x \neq x'$, δηλαδή ότι $x - x' \neq 0$, τότε θα ισχύει $\vec{i} = \dfrac{y' - y}{x - x'}\vec{j}$

Η σχέση αυτή, όμως, δηλώνει ότι $\vec{i} \,//\, \vec{j}$, που είναι άτοπο, αφού τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ δεν είναι συγγραμμικά.
Επομένως $x = x'$, που συνεπάγεται ότι και $y = y'$.
Δηλαδή το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των x, y κατά μοναδικό τρόπο.

10. Σε σύστημα αναφοράς xOy δίνεται τα σημεία Α(x_1,y_2) και Β(x_2,y_2). Αν είναι $\vec{OA}=\vec{\alpha}$ και $\vec{OB}=\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\lambda\vec{\alpha}$ είναι (x_1+x_2,y_1+y_2) και (λx_1, λx_2) αντίστοιχα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε έχουμε:

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})+(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}$
- $\lambda\vec{\alpha}=\lambda(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})=(\lambda x_1)\vec{i}+(\lambda y_1)\vec{j}$

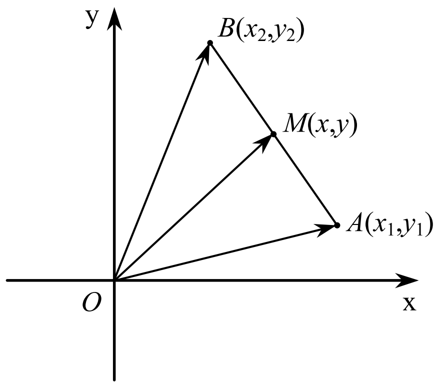
Επομένως $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ και $\lambda\vec{\alpha}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$

Δηλαδή $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$

$\lambda\cdot(x_1,y_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1)$

11. Σε σύστημα αναφοράς xOy δίνεται τα σημεία Α(x_1,y_2) και Β(x_2,y_2) και Μ το μέσο του ΑΒ. Αν είναι $\vec{OA}=\vec{\alpha}$ και $\vec{OB}=\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του διανύσματος $\vec{AB}$ είναι: x=$\frac{x_1+x_2}{2}$ και y=$\frac{y_1+y_2}{2}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και $M(x,y)$ είναι οι συντεταγμένες του μέσου του *AB*.

Είναι $\overrightarrow{OM}=(x,y)$, $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$

Τότε έχουμε ισοδύναμα

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\Leftrightarrow$$

$$(x,y)=\frac{1}{2}[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]\Leftrightarrow$$

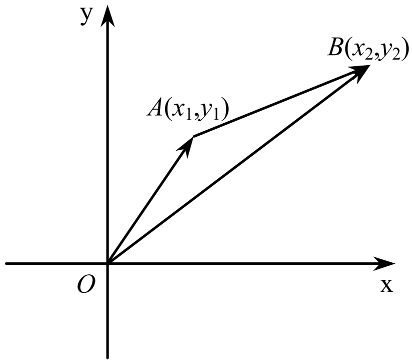
$$(x,y)=[(\frac{1}{2}x_1,\frac{1}{2}y_1)+(\frac{1}{2}x_2,\frac{1}{2}y_2)]$$

$$(x,y)==\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Επομένως ισχύει $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ και $y=\frac{y_1+y_2}{2}$

12. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες (x, y) ενός διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις: $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$.

Είναι: $\overrightarrow{AB} = (x, y)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$, και $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$,

Τότε έχουμε ισοδύναμα: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow$

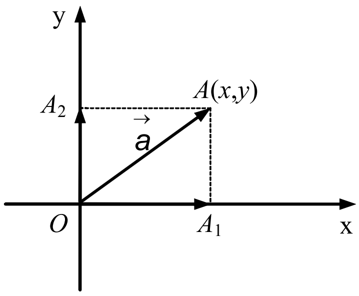
$$(x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \Leftrightarrow$$

$$(x, y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Άρα $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.

13. Έστω ένα διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x,y)$, να αποδείξετε ότι το μέτρο του είναι: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έστω $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} = (x, y)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου.
Το σημείο A έχει τετμημένη x και τεταγμένη y, και ισχύει $(OA_1) = |x|$ και $(OA_2) = |y|$.
Έτσι θα έχουμε:

$$|\vec{\alpha}|^2 = (OA_1)^2 + (A_1A)^2 =$$

$$= (OA_1)^2 + (OA_2)^2 = .$$

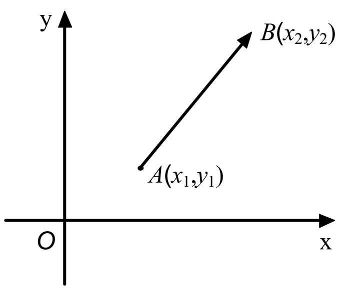
$$= |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

Άρα $|\vec{\alpha}|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow |\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

14. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_2)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Θεωρούμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Επειδή η απόσταση (AB) των σημείων A και B είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, έχουμε:

$$(AB) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

15. Έστω ένα διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$ Τι ονομάζεται συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$, με τι ισούται και τι ισχύει για τον συντελεστή διεύθυνσης στις περιπτώσεις που είναι α) x = 0 και β) y = 0.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} = (x, y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα και φ, η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα xx΄. Για τη γωνία φ, αν το $\vec{\alpha}$ δεν είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$, ισχύει: $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{y}{x}$.

Συντελεστήςς διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ ονομάζεται το πηλίκο $\frac{y}{x}$ της τεταγμένης προς την τετμημένη του $\vec{\alpha} = (x, y)$, με $x \neq 0$, Τον συντελεστή διεύθυνσης τον συμβολίζουμε με λ και ισχύει: $\lambda = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\varphi$

ΣΧΟΛΙΑ

— Αν $y = 0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha} // x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι ο $\lambda = 0$.

— Αν $x = 0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha} // y'y$, τότε **δεν ορίζεται** συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

16. Να αποδείξετε την ισοδυναμία $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ όπου λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντίστοιχα..

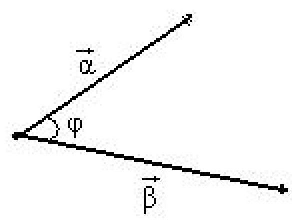
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως. Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

17. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα τότε να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου των δύο αυτών διανυσμάτων. Ποιές συνέπειες προκύπτουν από τον ορισμό.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



- Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$,

  όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = 0$, τότε ως εσωτερικό γινόμενο ορίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
- Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $\Leftrightarrow$ $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, $\Leftrightarrow$ $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$, $\Leftrightarrow$ $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2$

(Όπου $\vec{\alpha}^2$ το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ που ονομάζεται: **τετράγωνο του** $\vec{\alpha}$.)

18. Για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}|^2=\vec{\alpha}^2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

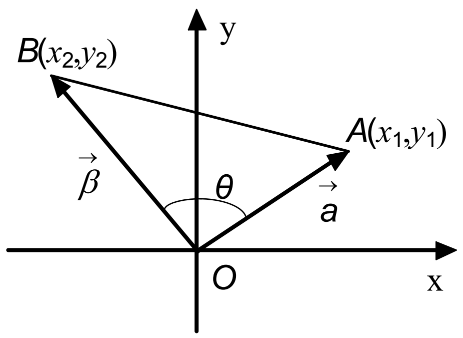
Έχουμε: $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|\text{συν}0=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|\cdot 1=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|=|\vec{\alpha}|^2$.

19. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους. Δηλαδή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$

Με αρχή το Ο παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$.



Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε:

$(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2-2(OA)(OB)\text{συν}\hat{\theta}$ (1)

η οποία ισχύει και στην περίπτωση που τα σημεία O, A, B είναι συνευθειακά.

Όμως είναι

$(AB)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$,

$(OA)^2=x_1^2+y_1^2$ και

$(OB)^2 = x_2^2 + y_2^2$.

Επομένως, από την (1) σχέση έχουμε διαδοχικά:

$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

$-2x_1x_2 - 2y_1y_2 = -2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$

20. Να αποδείξετε ότι:
i) $\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$ **ii)** $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ **iii)** $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2 = -1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$, τότε έχουμε:

i) $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = (\lambda x_1, \lambda y_1)(x_2, y_2) = (\lambda x_1)x_2 + (\lambda y_1)y_2 = \lambda(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$ και

$\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta}) = (x_1, y_1)(\lambda x_2, \lambda y_2) = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) = \lambda(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$.

Άρα, $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

ii)
$$\begin{aligned}\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) &= (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3) + (y_1y_2 + y_1y_3) = (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3) \\ &= \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}.\end{aligned}$$

iii) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1y_2 = -x_1x_2 \Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_1}\dfrac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$

21. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα και θ η γωνία των δύο αυτών διανυσμάτων, τότε να αποδείξετε ότι

συνθ= $\dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία *θ*, τότε

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}$.

Είναι όμως $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$.

Επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται: $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

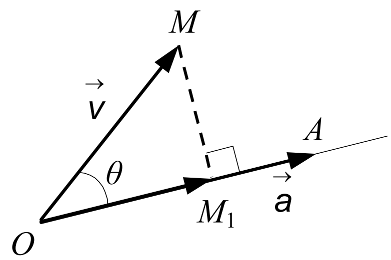
22. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ είναι δύο διανύσματα, τότε i) Τι ονομάζεται προβολή του διανύσματος $\vec{v}$ στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$; ii) Να αποδείξετε την ισότητα $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$.

Με αρχή ένα σημείο Ο παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OM}=\vec{v}$.

Από το *Μ* φέρνουμε ΜΜ₁ κάθετο στη διεύθυνση του $\overrightarrow{OA}$.



Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ λέγεται **προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$** και συμβολίζεται με $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

Δηλαδή, $\overrightarrow{OM_1}=\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot(\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M})=\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1}+\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{M_1M}=\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$

23. Πότε μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y ονομάζεται εξίσωση γραμμής .

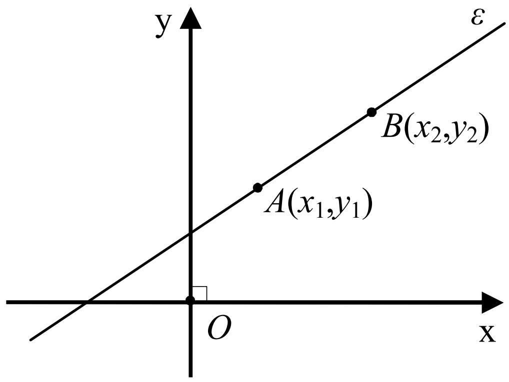
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y λέγεται εξίσωση μιας γραμμής *C*, όταν οι συντεταγμένες των σημείων της *C*, και μόνο αυτές, την επαληθεύουν.

24. Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω δύο τυχαία σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ μιας ευθείας (ε) που δεν είναι κάθετη στον άξονα xx΄.



τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας (ε) είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$,

δηλαδή $\lambda = \lambda_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Άρα $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

25. Να γραφτούν οι συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι δύο ευθείες με αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 και τα διανύσματα $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$ είναι παράλληλα προς τις ε_1 και ε_2 αντιστοίχως, έχουμε τις ισοδυναμίες

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 // \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

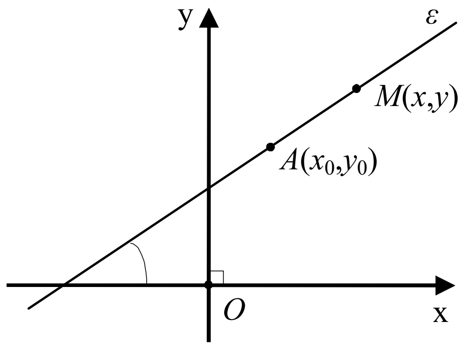
και

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \perp \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1.$$

26. Σε σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ και ένα σημείο της $A(x_o, y_o)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y - y_o = \lambda(x - x_o)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_0, y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου.



Έστω ένα δεύτερο σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό του $A(x_0, y_0)$ της ευθείας ε

Είναι $\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ και $\lambda_{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

Ισχύουν οι ισοδυναμίες: $\overrightarrow{AM} \,//\, \varepsilon, \Leftrightarrow \lambda_{AM} = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda \Leftrightarrow y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται και από το σημείο $A(x_0, y_0)$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε είναι:

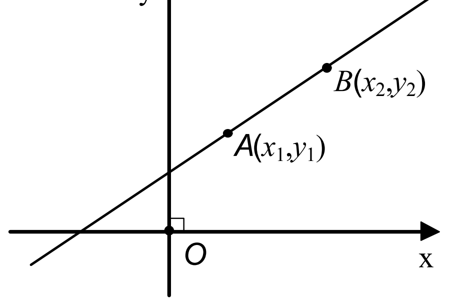
$$y - y_o = \lambda(x - x_o)$$

27. Να αποδείξετε ότι ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει εξίσωση

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω δύο τυχαία σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ της ευθείας (ε)



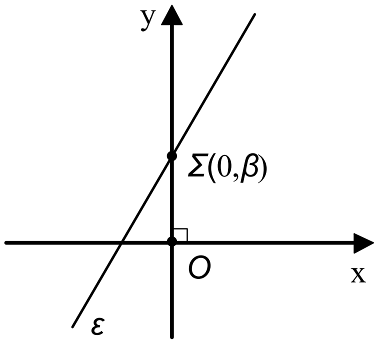
Αν $x_1 \neq x_2$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ και επομένως η εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ γίνεται: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

28. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής Ax+By+Γ=0 με A≠0 ή B≠0 και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής Ax+By+Γ=0 με A≠0 ή B≠0 παριστάνει ευθεία γραμμή.

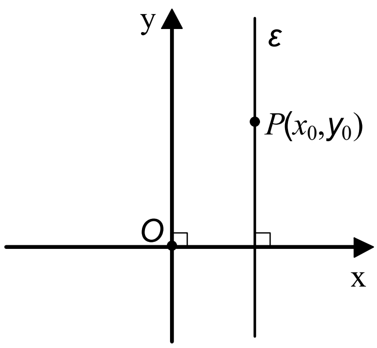
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω ε μια ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο.

Αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $\Sigma(0,\beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε θα έχει εξίσωση $y = \lambda x + \beta$, η οποία γράφεται $\lambda x + (-1)y + \beta = 0$



Αν η ευθεία ε είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0)$, τότε θα έχει εξίσωση $x = x_0$, η οποία γράφεται ισοδύναμα $x + 0 \cdot y + (-x_0) = 0$.



Επομένως και στις δύο περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας ε παίρνει τη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

- **Αντίστροφα,** έστω η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

— Αν $B \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{\Gamma}{B}$, που είναι εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\dfrac{A}{B}$ και η οποία τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $\left(0, -\dfrac{\Gamma}{B}\right)$.

— Αν $B=0$, τότε, λόγω της υπόθεσης, είναι $A \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται $x=-\frac{\Gamma}{A}$, που είναι εξίσωση ευθείας κάθετης στον άξονα $x'x$ στο σημείο του $P\left(-\frac{\Gamma}{A},0\right)$.

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

ΣΧΟΛΙΑ

α. Η εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,\beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y-\beta=\lambda(x-0) \Leftrightarrow y=\lambda x+\beta$.

β. Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε η εξίσωσή της είναι $y-0=\lambda(x-0) \Leftrightarrow y=\lambda x$.

γ. Έτσι, οι διχοτόμοι των γωνιών $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}x'$ έχουν εξισώσεις $y=x$ και $y=-x$ αντιστοίχως.

δ. Αν μια ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, έχει εξίσωση $y-y_0=0(x-x_0) \Leftrightarrow \boldsymbol{y=y_0}$.

29. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ε μια ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ και διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$

- Αν $B\neq 0$, τότε η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{A}{B}$ και το διάνυσμα $\lambda_\delta=-\frac{A}{B}$. Επειδή οι συντελεστές τους είναι ίσοι τότε η ευθεία είναι παράλληλη με το διάνυσμα.
- Αν $B=0$, τότε η ε και το διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι παράλληλα προς τον άξονα yy' επομένως και μεταξύ τους παράλληλα.

30. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση Ax + By + Γ = 0 είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n}=(A,B)$

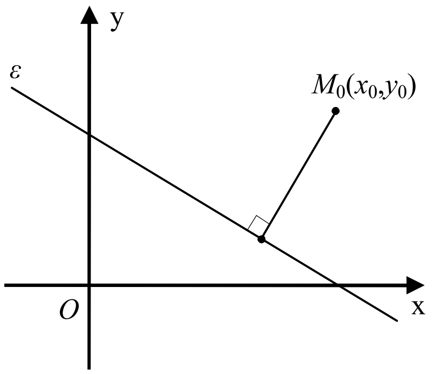
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι $\vec{\delta}\cdot\vec{n}=(B,-A)\cdot(A,B)=AB-AB=0$

Επομένως το διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n}=(A,B)$. Επειδή το διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι παράλληλο με την ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$, η ευθεία αυτή θα είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n}=(A,B)$

31. Έστω ε μια ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου, με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ και $M_0(x_0,y_0)$ ένα σημείο εκτός αυτής. Να γράψετε τον τύπου που προσδιορίζει την απόσταση d του σημείου M από την ευθεία ε.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Έστω ε μια ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου, με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ και $M_0(x_0,y_0)$ ένα σημείο εκτός αυτής.

Η απόσταση του σημείου M_o από την ευθεία ε δίνεται από τον τύπο:

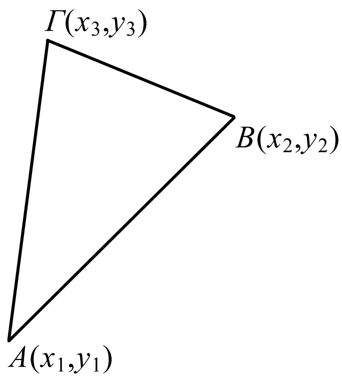
$$d(M_0,\varepsilon)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

32. Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου. Να γράψετε τον τύπο που προσδιορίζει το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση των συντεταγμένων των κορυφών του.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

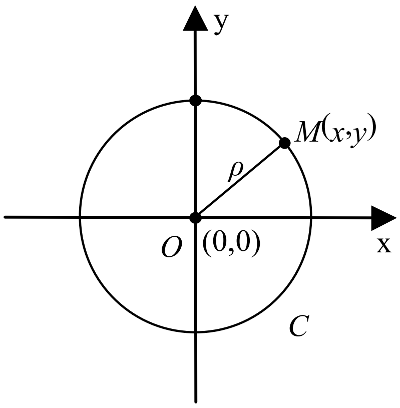
Έστω $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ και $\Gamma(x_3,y_3)$ τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου, τότε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ προσδιορίζεται από την σχέση:

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})|$$



33. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$. Ποιος κύκλος ονομάζεται μοναδιαίος;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ. Το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του O απόσταση ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει:

$$(OM)=\rho \qquad (1)$$

Όμως, $(OM)=\sqrt{x^2+y^2}$. Επομένως, η (1) γράφεται

$$\sqrt{x^2+y^2}=\rho \Leftrightarrow x^2+y^2=\rho^2. \qquad (2)$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι οι συντεταγμένες των σημείων του κύκλου και μόνο αυτές επαληθεύουν την εξίσωση (2). Άρα, ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο O(0,0) και ακτίνα $\rho=1$ έχει εξίσωση $x^2+y^2=1$ και ονομάζεται **μοναδιαίος κύκλος**.

34. Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε αυτό το σημείο έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$. Έστω ένα δεύτερο σημείο $M(x,y)$

Είναι $\vec{OA}=(x_1,y_1)$ και $\vec{AM}=(x-x_1,y-y_1)$

Ισχύουν οι ισοδυναμίες

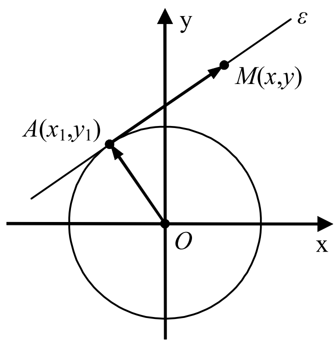
$$M(x,y)\in\varepsilon \Leftrightarrow OA\perp AM \Leftrightarrow \vec{OA}\cdot\vec{AM}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0$$

$$\Leftrightarrow xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$$

$$\Leftrightarrow xx_1+yy_1=\rho^2,$$

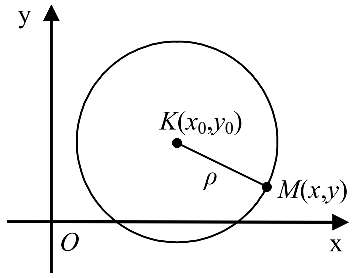
αφού $x_1^2+y_1^2=\rho^2$.



Επομένως, η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$

35. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο $K(x_o, y_o)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:
$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \rho^2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



- Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και *C* ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ. Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο *C*, αν και μόνο αν ισχύει :

$$(KM) = \rho \qquad (1)$$

Όμως, $(KM) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

36. Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ, ο κύκλος αυτός έχει εξίσωση

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Κάνοντας πράξη στην παραπάνω εξίσωση του κύκλου έχουμε :

$$x^2 - 2xx_o + x_o^2 + y^2 - 2yy_o + y_o^2 = \rho^2 \iff$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - \rho^2) = 0$$

δηλαδή παίρνει τη μορφή $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

όπου $A = -2x_0$, $B = -2y_0$ και $\Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$.

37. Να αποδείξετε ότι κάθε εξίσωση της μορφής: $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ **(1)** γράφεται διαδοχικά:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x^2 + Ax) + (y^2 + By) = -\Gamma \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2 + 2\frac{A}{2}x + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + 2\frac{B}{2}y + \frac{B^2}{4}\right) = -\Gamma + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} \Leftrightarrow$$
$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}.$$

Επομένως:

- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.
- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$, η εξίσωση (1) παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.
- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$, η εξίσωση (1) είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x, y)$ των οποίων οι συντεταγμένες να την επαληθεύουν.

38. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της. Ποια είναι η παράμετρος της παραβολής και τι παριστάνει. Ποιες είναι οι ιδιότητες της παραβολής. Να γραφτεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής σε ένα σημείο της $A(x_1, y_1)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Έστω μια ευθεία δ και ένα σημείο Ε εκτός της δ.
Παραβολή με **εστία** το σημείο Ε και **διευθετούσα** την ευθεία *δ* ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος *C* των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από την *Ε* και τη *δ*.

Β. Η εξίσωση της παραβολής *C* είναι:

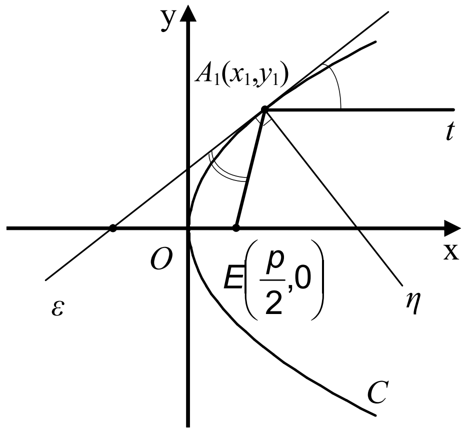
Αν η παραβολή έχει εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $\delta: x = -\frac{p}{2}$ έχει εξίσωση $y^2 = 2px$

Αν η παραβολή έχει εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα $\delta: y = -\frac{p}{2}$ έχει εξίσωση $x^2 = 2py$

Γ. Ο αριθμός ***p*** λέγεται **παράμετρος** της παραβολής και η $|p|$ παριστάνει την απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα.

Δ. Ιδιότητες της παραβολής

- Η γραφική παράσταση της παραβολής βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η διευθετούσα *δ* και η εστία *E*.
- Σε μια παραβολή $y^2 = 2px$ ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της .
- Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής A_1 διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία A_1E και η ημιευθεία A_1t , που είναι ομόρροπη της *ΟΕ*, όπου *Ε* είναι η εστία της παραβολής. (ανακλαστική ιδιότητα)



Ε. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής σε ένα σημείο της $A(x_1, y_1)$ είναι:

- $yy_1 = p(x + x_1)$ αν η παραβολή έχει εξίσωση $y^2 = 2px$
- $xx_1 = p(y + y_1)$ αν η παραβολή έχει εξίσωση $x^2 = 2py$

39. Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης και να γράψετε την εξίσωσή της. Ποιες είναι οι ιδιότητες της έλλειψης . Να γραφτεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης σε ένα σημείο της $A(x_1,y_1)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου.

Α. Έλλειψη με **εστίες** τα σημεία E' και E ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος *C* των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι *σταθερό* και μεγαλύτερο του $E'E$. Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε με 2α, δηλαδή Ένα σημείο *Μ* του επιπέδου είναι σημείο της έλλειψης, αν και μόνο αν $\boldsymbol{(ME') + (ME) = 2\alpha}$

Β. Η εξίσωση της έλλειψης *C* με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$$

Η εξίσωση της έλλειψης *C* με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ είναι

$$\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$$

Γ. Έστω μια έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$, τότε αυτή έχει τις εξής ιδιότητες:

- Αν $M_1(x_1,y_1)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης C, τότε τα σημεία $M_2(x_1,-y_1)$, $M_3(-x_1,y_1)$ και $M_4(-x_1,-y_1)$ ανήκουν στην C, αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της..

- Η έλλειψη C τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha,0)$ και $A(\alpha,0)$, ενώ τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B'(0,-\beta)$ και $B(0,\beta)$. Τα σημεία A',A,B',B λέγονται **κορυφές** της έλλειψης, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα $A'A$ και $B'B$, τα οποία έχουν μήκη $(A'A)=2\alpha$ και $(B'B)=2\beta$, λέγονται **μεγάλος άξονας** και **μικρός άξονας** αντιστοίχως.

- Η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες $x=-\alpha$, $x=\alpha$ και $y=-\beta$, $y=\beta$.

Δ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης σε ένα σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι

- $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$ αν έχει εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$
- $\frac{yy_1}{\alpha^2}+\frac{xx_1}{\beta^2}=1$ αν έχει εξίσωση $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$

40. Τι ονομάζεται εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Να αποδείξετε ότι για την εκκεντρότητα ε της έλλειψης ισχύει η σχέση: $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Εκκεντρότητα ε της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ ονομάζουμε, το λόγο $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}<1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ έχουμε:

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}\Leftrightarrow \varepsilon^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}=1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow \varepsilon^2=1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \text{ και άρα } \frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

41. Να δώσετε τον ορισμό της υπερβολής και να γράψετε την εξίσωσή της. Ποιες είναι οι ιδιότητες της υπερβολής . Να γραφτεί η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής σε ένα σημείο της Α(x_1,y_1) και οι εξισώσεις των ασύμπτωτων της

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου.

Α. υπερβολή με εστίες τα σημεία E' και E ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και E είναι *σταθερή* και μικρότερη του $(E'E)$. Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου της υπερβολής από τις εστίες την παριστάνουμε με 2α, ενώ την απόσταση των εστιών με 2γ. Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** της υπερβολής.

Ένα σημείο M είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν $|(ME')-(ME)|=2\alpha$.

Β. Η εξίσωση της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$, είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$$

Η εξίσωση της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ είναι

$$\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$$

Γ. Έστω μια υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, όπου $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$, τότε αυτή έχει τις εξής ιδιότητες:

- Η υπερβολή έχει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας. Επομένως, η ευθεία που ενώνει τις εστίες E', E της υπερβολής και η μεσοκάθετη του $E'E$ είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής, ενώ το μέσο O του $E'E$ είναι κέντρο συμμετρίας της. Το σημείο O λέγεται **κέντρο** της υπερβολής.
- Η υπερβολή τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha,0)$, και $A(\alpha,0)$. Τα σημεία αυτά λέγονται **κορυφές** της υπερβολής. και δεν τέμνει τον άξονα $y'y$.
- Τα σημεία της υπερβολής βρίσκονται έξω από την ταινία των ευθειών $x=-\alpha$ και $x=\alpha$, πράγμα που σημαίνει ότι η υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους.
- Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της M διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου E', E οι εστίες της υπερβολής

Δ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής σε ένα σημείο της Α(x_1,y_1) είναι

- $\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1$ αν έχει εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$
- $\frac{yy_1}{\alpha^2}-\frac{xx_1}{\beta^2}=1$ αν έχει εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$

42. Να γραφτούν οι εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Αν η υπερβολή *C* έχει εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, τότε οι ασύμπτωτες της είναι ευθείες:

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x, \qquad \text{και} \qquad y=-\frac{\beta}{\alpha}x\ .$$

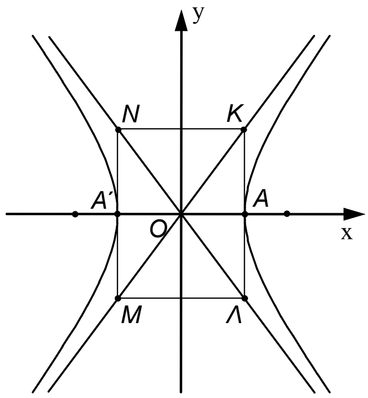
- Αν η υπερβολή *C* έχει εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$, τότε οι ασύμπτωτες της είναι ευθείες:

$$y=\frac{\alpha}{\beta}x \qquad \text{και} \qquad y=-\frac{\alpha}{\beta}x\,.$$

43. Τι ονομάζεται ορθογώνιο βάσης μιας υπερβολής;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ορθογώνιο βάσης της υπερβολής ονομάζεται το ορθογώνιο *ΚΛΜΝ* με κορυφές τα σημεία $K(\alpha,\beta)$, $\Lambda(\alpha,-\beta)$, $M(-\alpha,-\beta)$ και $N(-\alpha,\beta)$.



44. Τι ονομάζεται εκκεντρότητα υπερβολής;. Να αποδείξετε ότι για την εκκεντρότητα ε μιας υπερβολής ισχύει η σχέση $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Εκκεντρότητα ***ε*** της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, ονομάζεται ο λόγος $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, για την εκκεντρότητα ε έχουμε:

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha}\Rightarrow \varepsilon^2=1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \quad \text{άρα} \quad \frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}\,.$$

45. Πότε μια υπερβολή ονομάζεται ισοσκελής; Να αποδείξετε ότι στην ισοσκελή υπερβολή η εκκεντρότητά της είναι ε = $\sqrt{2}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω η υπερβολή *C* με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$,

Ισοσκελής ονομάζεται η υπερβολή για την οποία ισχύει α = β και αυτή έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\alpha^2}=1 \Rightarrow x^2-y^2=a^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Στην ισοσκελή υπερβολή η εκκεντρότητα είναι ίση με

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\alpha^2}}{\alpha}=\frac{\sqrt{2\alpha^2}}{\alpha}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{\alpha}=\sqrt{2}$$