ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΜΕΧΡΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει : $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Μονάδες 5

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Μονάδες 3

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 3

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στις λύσεις το γράμμα Α, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Μονάδες 10

i) Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m,\mathrm{M}]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

ii) Αν για μια συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$, ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο (α,β).

iii) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

iv) Αν η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0.

v) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει :

$$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)'\cdot g^2(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0).$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{-x}-x, & x\leq 0 \\ \ln(x+1)+1, & x>0 \end{cases}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Μονάδες 4

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $e^{f(x)-2}-1=0$, (1) έχει ακριβώς δύο ετερόσημες ρίζες.

Μονάδες 5

Β4. Αν x_1,x_2 (με $x_1<x_2$) οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να δείξετε ότι η εξίσωση : $(x-x_1)\big(f(x)-4\big)=(x-x_2)\big(2-f(2-f(x))\big)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1,x_2).

Μονάδες 5

Β5. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-1}{f(\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x-f(\alpha)+1}$, αν $\alpha\in\Re^*$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ για την οποία ισχύει :

$$f^3(x)+(x-1)^2 f(x)-2(x-1)^3=0 \text{ για κάθε } x\in\Re.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(1)=0$ και $f'(1)=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{M}(1,f(1))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)}{h-\eta\mu 3h}$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)\cdot f(x)}{\sqrt{x}-1+f(x)}$.

Μονάδες 6

Γ4. Θεωρούμε επιπλέον τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $g,h:(0,+\infty)\to\Re$ για τις οποίες ισχύουν : $h(x)=g'(x)$ και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+4h)-g(x-h)}{h}=5x\ln x+5x^2+15x$. Να δείξετε ότι $h(x)=x\ln x+x^2+3x$, $x>0$.

Μονάδες 4

Γ5. Αν η εφαπτομένη (ε) του ερωτήματος **Γ2.** είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=x-1$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h, η οποία είναι κάθετη στην ευθεία (ε).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ και $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει :

- $f^2(x)-\sigma\upsilon\nu^2 x=2f(x)\eta\mu x+e^{2x}-1$, για κάθε $x\in\Re$.
- Η γραφική παράστασης της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(0,1)$.
- Η g είναι γνησίως μονότονη.

Δ1. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\eta\mu x+e^x$, $x\in\Re$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[1,3]$, τέτοιο ώστε να ισχύει : $f(\xi)=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(3)}$.

Μονάδες 5

Δ3. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $h(x)=f(x)+\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$, $x\geq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $h(x)=2018$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα στο διάστημα $\Delta=[0,+\infty)$.

Μονάδες 5

Δ4. Αν δίνεται το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-h(x_1)\cdot x^5}{\left(g(2)-g(3)\right)\cdot x^3+x+1}=-\infty$, όπου x_1 είναι η ρίζα του ερωτήματος Δ3. , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε :

$$\frac{g(\alpha)-g(\eta\mu\alpha)}{x_0-1}+\frac{(h\circ g)(\beta)-(h\circ g)(\alpha)}{x_0-2}=0\text{, με } 0<\alpha<\beta.$$

Μονάδες 5